

文章编号: 1001-7372(2007)02-0001-06

弹性地基板模态试验及地基动参数识别

易伟建, 周 云, 张望喜

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘要: 用脉冲锤击法进行了弹性地基上自由板的自由振动模态试验, 并用 Me'scope 软件分析传递函数, 得到了 7 阶位移模态和应变模态。在此基础上, 对试验结果进行了初步的分析并总结了弹性地基板振动测试的场地经验。对用优质 LR12 2 元建立的厚板 ADS1 元进行了 Vlasov 地基上矩形板的有限元分析, 同时对 Vlasov 地基上板的振型进行了分析, 利用刚体模态进行了 Winkler 地基参数识别, 并利用 2 阶频率, 根据模态振型匹配的原则进行双参数地基参数的识别。结果表明: 该有限元分析程序具有较强的通用性, 地基板的振型呈模态密集区的形式。

关键词: 道路工程; 弹性地基板; 模态试验; 动参数识别; 厚薄板通用元; 刚体模态

中图分类号: U416.1 **文献标志码:** A

Modal Experiment on Elastic Foundation Slab and Identification of Dynamic Foundation Parameters

YI Wei Jian, ZHOU Yun, ZHANG Wang xi

(School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, Hunan, China)

Abstract: The free vibration modal experiments of elastic foundation free slab were conducted by hammer hitting excitation method, and 7 order displacement modes and strain modes were obtained by analyzing transfer functions used Me'scope software. The primary analysis was done on the experiment results and the site experience of vibration test on the elastic foundation slab was concluded. The finite element analysis of rectangular slab on Vlasov foundation was presented with thick element ADS1 which was formed by high quality element LR12 2. The vibration shapes of the slab on Vlasov foundation were analyzed. The rigid mode was used to identify Winkler foundation parameters; the foundation parameters of the two parameter foundation were identified according to the principle of match of modal vibration shape by using two order frequencies. Results indicate that the finite element analysis program has better generalization and the vibration shapes of elastic foundation slab represent modal dense region.

Key words: road engineering; elastic foundation slab; modal experiment; identification of dynamic parameter; generalized element for thick-thin slab; rigid mode

0 引 言

弹性地基板在工程上有着广泛的运用, 是研究

混凝土刚性路面、机场道面、建筑物板式基础的雏形, 许多学者对此进行了广泛而深入的研究并进行了弹性地基上板的模态试验, 但给出完整模态振型

收稿日期: 2006 08 12

基金项目: 国家自然科学基金项目(50378034); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(20030532020)

作者简介: 易伟建(1954-), 男, 湖南长沙人, 教授, 博士生导师, 工学博士, E-mail: hunuyi@public.cs.hn.cn.

频率测试结果的却很少。Soheil等^[1]采用脉冲方法获取了公路板的动力响应;许金余等^[2]对3种飞机作用下机场道面的动力荷载性进行了研究,对3块足尺板进行了锤击法的动力时域分析;曾亚^[3]、张望喜^[4]对弹性地基上的地基梁板进行了系统的模态测试研究;王陶^[5]利用FWD实测板中的弯沉盆反演模量,用遗传算法进行刚性路面板的脱空判别;Niels等^[6]对使用脉冲锤击法进行地基板和梁的动力信号分析中常见的问题进行了探讨,并对地基脱空与梁局部损伤情况下传递函数的特征进行了研究。

本文中笔者从弹性地基板模态试验结果出发,对影响测试结果的因素和试验中发现了问题进行了探讨,用基于Vlasov地基上厚板的ADS1元进行了有限元分析,并基于频域上的模态振型相似原则识别地基参数,为损伤诊断提供依据。

1 地基板模态试验

由于地基土的不均匀性、弹塑性、非线性以及无界性,对于土上结构构件的动力测试研究很少,其机理比理想固定支座结构要复杂得多。在具体的脉冲锤击测试中,由于涉及到波在地基中的传播、波在板和地基的交界处的反射和透射、板和土之间的粘结状况等因素,因此模态信息不容易得到,至今未见到能得到地基板的振动结果的报道。本文中笔者总结以往经验,通过用可调软硬程度的力锤,使用高精度的加速度应变计测试应变模态,合理设置采样频率,进行多次重复测试以及对位移模态和应变模态进行综合分析来解决此问题。

1.1 试验方法及测试结果

研究对象是四周自由的混凝土板(图1),尺寸为1000 mm×1000 mm,厚度为50 mm,实际强度为C35,混凝土的弹性模量 E_0 为3000 MPa。用承载板法^[7]测试10个点得平均地基模量为48.091 MPa。试验数据用美国迪飞430型动态信号分析仪进行采集,用PCB压电式可调力锤激振,用PCB压电式加速度计和动态应变计进行测试,并用Me scope软件进行模态分析。力锤信号覆盖范围800 Hz,采样频率范围1250 Hz,采样谱线数125。将板划分为25块200 mm×200 mm的方格,共得到36个交点,用16点拾振,敲遍其他点作多点传递函数,汇总进行模态参数识别,得到模态振型分别如图2、3所示。为了解板的振动全模态,特别是低阶频率,降低采样频率,重新设置采样频率分别到625、320 Hz,得到

低阶的频率和阻尼比(表1)。由于应变是位移的一阶导数,因此应变模态没有刚体模态的特征,将识别出来的36条典型位移传递函数与应变传递函数汇总,得传递函数分别如图4、5所示。

表1 模态频率和振型测试结果

Tab. 1 Measured Results of Modal Frequency and Vibration Shapes

阶数	第1阶	第2阶	第3阶	第4阶	第5阶	第6阶	第7阶
频率/Hz	61.0	91.4	125.0	172.0	255.0	432.0	741.0
阻尼比/%	45.60	26.20	26.80	5.89	6.42	4.53	6.19

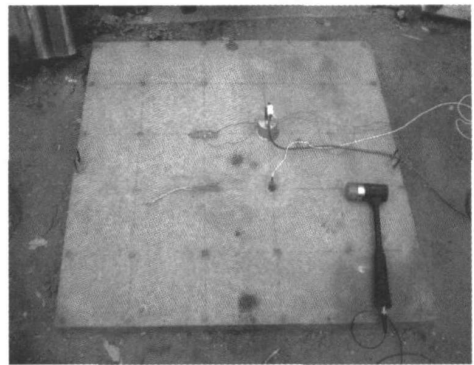


图1 试验模型

Fig. 1 Experiment Model

1.2 测试结果分析

经过多次测试,得到以下规律:

(1)对于地基结构的耦合系统,边界较大,锤击产生的波动在边界上一部分反射,一部分透射入土,反射波在运动物体内部又将进行下一次折射入土,这样在体系内部不能形成定常的振动现象。在时域上表现为快速的波形衰减,得到两三次波动峰值后,信号很快变得平直,使得FFT信号分析的精度受到严重影响。

(2)用同样大小的力对地基板进行测试所得的结果离散性较大,这是因为地基系统是一个耗散系统,而地基的不均匀性导致了其测试结果的离散。且由于每次的锤击力总保持在 $3500 \times (1 \pm 5\%)$ N之内,与线性结构相比较(如基底固定的框架结构的频率变幅仅为 $\pm 0.2\%$),其离散的数量级较大。

(3)应变模态的测试结果比位移模态的要清晰,应变模态传递函数的峰值很明确,这主要是由于板地基系统在轮流锤击时产生的各种波在界面之间反射和折射而造成加速度计采样失真,应变计则更加突出对混凝土拉伸和压缩应变的采集,受干扰程度较小。

(4)锤击力大小对振动频率与阻尼的离散程度

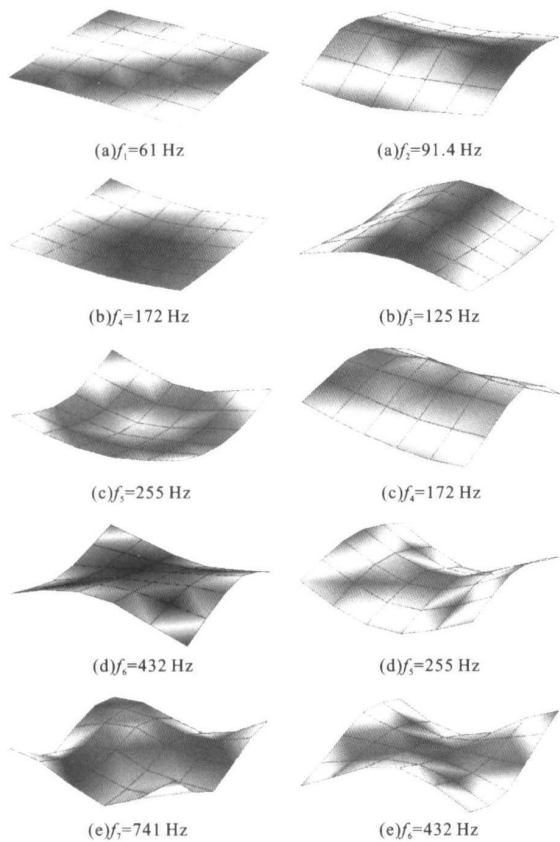


图 2 位移模态 5 阶振型 图 3 应变模态 5 阶振型
Fig. 2 5 Order Vibration Shapes of Displacement Mode Fig. 3 5 Order Vibration Shapes of Strain Mode

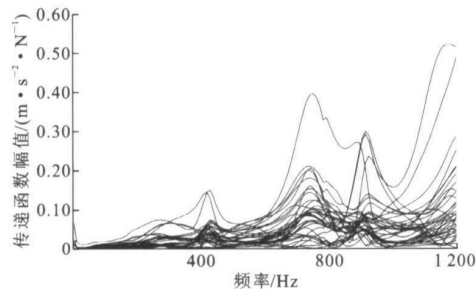


图 4 位移模态试验传递函数
Fig. 4 Transfer Function of Displacement Modal Experiment

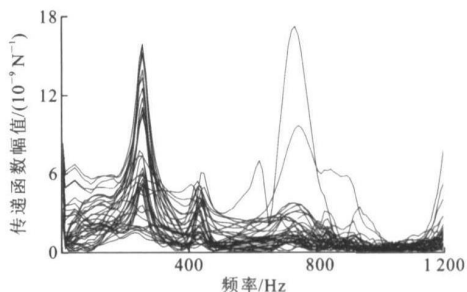


图 5 应变模态试验传递函数

Fig. 5 Transfer Function of Strain Modal Experiment
向转动) 频率大致相同, 由于地基不均, 其振型表现为最易出现的一种。

2 自由板的厚薄板通用元分析

2.1 Vlasov 地基上的自由板

由于在试验中发现地基板性质与激励的大小相关性不大, 因此可用弹性地基模型分析。由于 Winkler 模型不能考虑周边地基土体的贡献, 因而在实际分析中多用双参数地基模型。由于 Vlasov 模型是根据变分原理, 通过假设地层中的位移分布由弹性地基推导而来, 因此它的 2 个参数具有实际意义。对于 Vlasov 地基上的自由板, 将其总势能泛函分别对 w 和 φ 取变分, 则得到

$$D \nabla^4 w - 2t \nabla^2 w + kw + m\ddot{w} = q \quad (1)$$

$$k = \int_0^H \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz \quad (2)$$

$$2t = \int_0^H \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi^2 dz \quad (3)$$

$$\varphi(z) = \frac{\sinh[\gamma(1-z/H)]}{\sinh \gamma} \quad (4)$$

式中: w 为板的竖向位移; E 为地基弹性模量; ν 为泊松比; H 为地基深度; γ 为地基土的垂直变形参数; $\varphi(z)$ 为地基内位移形状函数; q 为外部荷载; D 为板的弯曲刚度, $D = Eh^3 / [12(1-\nu)]$, h 为地基板厚度; ∇^2 为微分算子, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 。

2.2 厚薄板通用元分析

对于弹性地基板的分析, 常用单元有 20 节点砖块等参元^[8,9] 以及薄板 4 节点矩形单元。文献[10] 中将 LFR1 与 C10 单元用于厚薄板自由振动分析, 指出前几阶固有频率结果良好。文献[11] 中利用优质 LR12 2 元建立的厚板 ADS1 元进行双参数地基上静力分析, 并用遗传算法识别了地基参数。本文中利用 ADS1 元进行 Vlasov 地基上矩形板的动力分析。

厚薄板通用元位移场可通过矩形单元域位移场 (w, ψ, ψ) 和增补位移场 (w^*, ψ^*, ψ^*) 叠加而成,

影响不大。可认为脉冲力量级对板地基系统的频率测试结果无影响, 可以用弹性地基的各种模型来描述板地基系统。

(5) 位移模态与应变模态的频率值基本对应, 各阶模态在频率响应函数中不一定会出现。位移模态中刚体模态很难通过测试得到, 一是由于高阻尼(其中测得的第 1 阶刚体模态阻尼比为 45.6%, 频率响应函数基本无峰值突出, 无法进行模态拾取); 二是由于重频现象, 刚体模态的 3 阶(整体平动, 2 个方

其中, $w = w_0 + w^*$, $\psi = \psi_0 + \psi^*$, $\psi = \psi_0 + \psi^*$ 。位移形函数见文献[4]。

矩形厚板单元的应变能为

$$U_b = \frac{D}{2} \iint_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy + \frac{D}{2} \iint_A 2\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y^2} \right) + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (5)$$

$$U_\tau = \frac{C}{2} \iint_A (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) dx dy \quad (6)$$

$$U_k = \frac{1}{2} \iint_A w^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_A (w_0 + w^*)^2 dx dy \quad (7)$$

$$U_{2t} = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} Q_x + \frac{\partial w}{\partial y} Q_y \right) dx dy \quad (8)$$

式中: μ 为混凝土板的泊松比; C 的取值见文献[10]; U_b 、 U_τ 、 U_k 、 U_{2t} 分别为板弯曲应变能, 剪切应变能, 地基第 1、第 2 参数应变能; γ_x 和 γ_y 分别为板的横、纵方向剪应变; Q_x 和 Q_y 分别为单元的横、纵方向剪力。

矩形厚板单元的动能为

$$T = \frac{1}{2} \rho_p h \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA + \frac{1}{2} \iint_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (9)$$

本文中利用文献[12]中优质 LR12 2 元建立了厚板 ADS1 元, 采用 Hamilton 原理得到单元刚度矩阵为

$$k_b = \iint_A \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA \quad (10)$$

$$k_s = \iint_A \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s dA \quad (11)$$

$$k_k = kab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*)^T (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*) d\xi d\eta \quad (12)$$

$$k_t = 2tab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial \xi} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + 2tab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial \eta} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}^*}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (13)$$

$$\mathbf{M} = ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*)^T \mu (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*) d\xi d\eta \quad (14)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \rho_p h + \rho_s H/3 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_p h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_p h^3/12 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: a 、 b 分别为板的长、短边长的 1/2; ρ_p 和 ρ_s 分别为板和土的密度。

从式(15)中可以看出, 密度矩阵中, $\rho_p H/3$ 实际

上考虑了地基土参振质量的影响, 这与其他双参数模型不同, 因而比其他双参数模型更加接近实际。

2.3 边界外地基土

Vlasov 指出板外地基土的位移呈指数分布, 因此在板边和板角可以用等效分布力和集中力作用于其上, 修正板边和板角的地基刚度矩阵。板边和板角的单元刚度矩阵修正为:

板边分布力贡献

$$\Delta \mathbf{K}_b = \frac{1}{2} \sqrt{2k} \int_{-b}^b (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*)^T (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*) dy |_{x=m} \quad (16)$$

板角集中力贡献

$$\Delta \mathbf{K}_j = \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 2t}{2} (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*)^T (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}^*) |_{x=m, y=n} \quad (17)$$

式中: m 、 n 为边界位置。

2.4 程序的通用性

用 Vlasov 地基上的厚薄板通用有限元程序计算弹性地基上板的振动, 表现出很强的通用性。它可以反映板厚度对频率产生的影响; 将 $k \cdot 2t$ 任意组合, 单元质量密度矩阵中 H 取为 0, 则退化为双参数地基上的自由薄板振动问题; 将 $2t$ 退化为 0, 周围地基刚度贡献退化为 0, 则退化为 Winkler 地基上的自由薄板振动问题。因此对该程序作较小修改就可以很方便地计算不同类型地基上薄板的振动。

2.5 振型分析

文献[13]中对 Vlasov 地基上板模型的计算考虑 H 从 0~15 m 变化, γ 从 1~8 变化。当 $H = 0.25$ m 和 $\gamma = 3$ 时, 作出前 10 阶模态振型, 如图 6 所示。由计算可知, 双参数地基上的自由板和 Winkler 地基上自由板的振型类似, 规律也相同, 只是频率值与振型向量值不同。从振型分析可以看出, 薄板的振型可分为模态密集区, 第 1~3 阶为第 1 密集区, 第 4~6 阶为第 2 密集区, 第 7~10 阶为第 3 密集区。刚体模态是地基板中特殊的振动形式, 板振动时板变形势能为 0, 势能由地基基础变形产生, 板构件表现为整体平动和 2 个方向的转动 3 种振动形式, 3 阶频率一般相等。由于双参数地基中板外地基的贡献及板边和板角有反力作用, 振型中不会出现刚体模态, 即前 3 阶振型中出现弯曲变形成分, 文献[4]中称此为广义刚体模态。

3 Vlasov 地基上板的地基参数识别

3.1 由刚体模态频率识别 Winkler 地基参数

Winkler 地基参数是一种衡量土基软硬程度的相对值, 对于不同尺寸的构件(如无限长梁、有限长

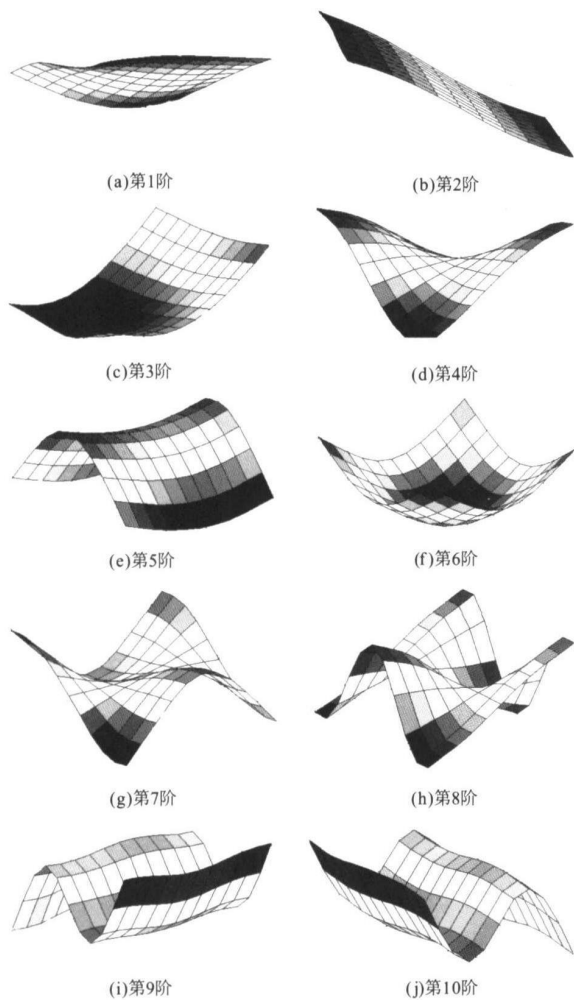


图 6 Vlasov 地基上自由板的前 10 阶模态振型

Fig. 6 First 10 Order Modal Vibration Shapes About Free Slab on Vlasov Foundation

梁、板)基于等效原则(最大弯矩相等,最大位移相等),则有相应的 k 值,对基于动力等效的板的 k 值与弹性模量 E 的关系无确切的说法。把地基看作最简单的 Winkler 地基^[14-18],将地基板的刚体模态与 Winkler 地基上自由板的计算刚体模态值相比,以测得第 1 阶频率 $f_1 = 61$ Hz,通过有限元计算直接识别 Winkler 地基参数值 $k = 18.5 \times 10^6$,由文献[19]中采用 Winkler 参数基于地基性质的分类,可以将其归纳为黏土及粉质黏土。这与场地实际情况相符。

3.2 由 2 阶频率识别双参数地基参数

基于振型相似的原则,用各次重复测试频率离散性最小、振型最清晰的第 5、6 阶作为与前 2 阶模态匹配的振型,对 k 和 $2t$ 值进行搜索,将 Vlasov 地基参数性质归结为对 H 和 γ 值的选择,定义最小二乘函数

$$\Delta f_{\min} = \sqrt{\sum (f_{iM} - f_{iC})^2} \quad (18)$$

式中: f_{iM} 、 f_{iC} 分别为第 i 阶测试结果和计算结果。以 Δf_{\min} 最小为原则,进行数值选优。另外考虑 20% 的地基弹性模量摄动,分析由于地基模量的测试误差造成的识别误差,得到的参数见表 2。

表 2 数值搜索结果

Tab. 2 Numerical Searching Results

工 况	各阶频率 /Hz		由最小二乘准则识别得到的参数			
	第 6 阶	第 7 阶	H/m	γ	$k/10^8$	$2t/10^5$
1	253.47	418.31	0.25	3	4.02	7.51
2	251.32	417.75	0.26	2	3.55	12.80

注:工况 1 指利用实测弹性模量和 2 阶频率的情形;工况 2 指利用实测弹性模量和 2 阶频率,并考虑 20% 的摄动的情形。

4 结 语

(1) 应变模态比位移模态更适合用于弹性地基板的测试,脉冲力量级对测试结果无影响,因此可采用弹性地基上的自由板模型描述试验对象。

(2) 利用 Vlasov 地基上的厚薄板通用元(ADS1 元)可以考虑双参数地基的特点、参振质量和板中转动惯量的影响,比四边矩形单元更精确,并考虑了板厚的影响。Vlasov 地基上自由板的厚薄板通用有限元可以方便地退化为双参数地基和 Winkler 地基上的自由板有限元再进行计算。双参数地基上的板无真正意义上的刚体模态。

(3) 由刚体模态频率识别了 Winkler 地基参数。基于振型匹配原则以及最小二乘原则进行地基参数的识别,由 2 阶频率可以识别 Vlasov 地基的 2 个参数。

(4) 本文中从频域测试的角度为测试地基参数提供了一种新的方法。由于对双参数地基参数取值与地基弹性模量的关系缺乏依据,因此基于振型匹配原则所得的地基参数识别值需进一步证实。

参考文献:

References:

- [1] SOHEIL N, SRINIVASA R. Study of Parameters Affecting Impulse Response Method [J]. Journal of Transportation Engineering, 1996, 122(4): 308-315.
- [2] 许金余, 邓子辰. 机场刚性道面动力分析 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2002.
XU Jin yu, DENG Zi chen. Dynamic Analysis of Airport Rigid Pavement [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2002.
- [3] 曾 亚. 混凝土刚性路面静、动力特性及损伤诊断

- 研究[D].长沙:湖南大学,1998.
- ZENG Ya. Research on Static and Dynamic Characteristic of the Concrete Rigid Pavement and Damage Diagnosis[D].Changsha; Hunan University, 1998.
- [4] 张望喜. 混凝土基板静、动力特性试验与研究[D].长沙:湖南大学,2002.
- ZHANG Wang xi. Research on Static and Dynamic Experiment of Concrete Foundation Slab[D].Changsha; Hunan University, 2002.
- [5] 王陶. 基于遗传算法的刚性路面脱空判定[J]. 中国公路学报, 2003, 16(3): 23-26.
- WANG Tao. Void Identifying of Rigid Pavement Based on Genetic Algorithm[J]. China Journal of Highway and Transport, 2003, 16(3): 23-26.
- [6] NIELS S, MATTI R, ALLEN G. Theoretical Interpretation of Impulse Response Tests of Embedded Concrete Structures[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(9): 1062-1071.
- [7] JTJ 059—95, 公路路基路面现场测试规程[S]. JTJ 059—95, Code for Field Test of Highway Subgrade and Pavement[S].
- [8] AYVAZ Y, DALOGLU A, DOGANGUN A. Application of a Modified Vlasov Model to Earthquake Analysis of Plates Resting on Elastic Foundations[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 212(3): 499-509.
- [9] WU C P, SHE P A. Dynamic Analysis of Concrete Pavements Subjected to Moving Loads[J]. Journal of Transportation Engineering, 1996, 122(5): 367-373.
- [10] 龙志飞, 岑松, 匡文起, 等. 厚薄板振动分析的通用矩形单元[J]. 工程力学, 1996, 13(增): 332-334.
- LONG Zhi fei, CEN Song, KUANG Wen qi et al. A Generalized Rectangle Element for Analysis of Thick thin Slab[J]. Engineering Mechanics, 1996, 13(S): 332-334.
- [11] 张望喜, 易伟建. 双参数地基上厚薄板通用元与地基参数识别的挠度分析[J]. 工程力学, 2003, 20(6): 46-51.
- ZHANG Wang xi, YI Wei jian. A Generalized Conforming Element for Thick thin Slabs on Double parameter Foundation and Inverse Analysis of Deflection for Foundation Parameter Identification[J]. Engineering Mechanics, 2003, 20(6): 46-51.
- [12] 龙志飞, 王海霞. 将薄板矩形单元扩展为厚板通用单元的一般方法[J]. 工程力学, 2000, 17(4): 37-43.
- LONG Zhi fei, WANG Hai xia. A Universal Method for Constructing Rectangular Elements for Thin and Thick Plates[J]. Engineering Mechanics, 2000, 17(4): 37-43.
- [13] DA LOGLU A, DOGANGUN A, AYVAZ Y. Dynamic Analysis of Foundation Plates Using a Consistent Vlasov Model[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 224(5): 941-951.
- [14] 蒋建群, 周华飞, 张士乔. 移动荷载下粘弹性地基上无限大板的稳态响应[J]. 中国公路学报, 2006, 19(1): 6-11.
- JIANG Jian qun, ZHOU Hua fei, ZHANG Tu qiao. Steady State Response of Infinite Plate on Visco elastic Foundation Subjected to Moving Load[J]. China Journal of Highway and Transport, 2006, 19(1): 6-11.
- [15] 石坚, 武莹, 贺建辉. 上部结构、筏板基础和地基共同作用的有限元分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2006, 23(2): 72-75.
- SHI Jian, WU Ying, HE Jian hui. FEA on Interaction of Super Structure, Raft Foundation and Ground Base[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2006, 23(2): 72-75.
- [16] 陈仁朋, 许峰, 陈云敏, 等. 软土地基上刚性桩路堤共同作用分析[J]. 中国公路学报, 2005, 18(3): 7-13.
- CHEN Ren peng, XU Feng, CHEN Yun min, et al. Analysis of Behavior of Rigid Pile supported Embankment in Soft Ground[J]. China Journal of Highway and Transport, 2005, 18(3): 7-13.
- [17] 娄平, 曾庆元. 移动荷载作用下板式轨道的有限元分析[J]. 交通运输工程学报, 2004, 4(1): 29-33.
- LOU Ping, ZENG Qing yuan. Finite Element Analysis of Slab Track Subjected to Moving Load[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2004, 4(1): 29-33.
- [18] 易伟建, 杨随新. 软土地基上的土结构动力相互作用[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22(2): 61-65.
- YI Wei jian, YANG Sui xin. Soil structure Dynamic Interaction Based on Soft Soil Foundation[J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2005, 22(2): 61-65.
- [19] 黄义, 何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- HUANG Yi, HE Fang she. The Beam, Slab and Shell on Elastic Foundation[M]. Beijing: Science Press, 2005.